5.1 Matrices semblables

Définition 55 (semblables)**.**
Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices. S'il existe une matrice $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$(*) \quad \underline{B = P^{-1}AP} \qquad \text{i.e.} \quad PB = AP$$

on dira que A est *semblable* à B.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a $AP = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

et $PB = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

donc $AP = PB$. P est inversible

et $B = P^{-1}AP$

$A = PBP^{-1}$

__Remarque:__ $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 12 = p_B(\lambda)$.

Remarques On choisit de mettre P^{-1} en premier dans la mult. matricielle :

A est semblable à B

$\iff B = P^{-1}AP \iff PB = AP$

$\iff PBP^{-1} = A \iff (P^{-1})^{-1} B P^{-1} = A$

$\iff Q^{-1}BQ = A$ en posant $Q = P^{-1}$

$\iff$

B est semblable à A.

Théorème 50. *Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et les mêmes polynômes caractéristiques.*

Preuve A et B semblables, donc il existe P inversible avec $B = P^{-1}AP$.

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n)$$
$$= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I_n P)$$
$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P)$$
$$= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P)$$
$$= \underbrace{\det(P^{-1})\det(P)}_{=1}\det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$$

Remarques

⚠ mêmes valeurs propres $\not\Rightarrow$ matrices semblables !

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont les mêmes valeurs propres.

| On observe que A et B sont éq. selon les lignes

Exemples

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables mais pas éq. selon les lignes.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables et éq. selon les lignes.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont ni semblables ni éq. selon les lignes.

Donc: semblables $\not\Rightarrow$ éq. selon les lignes ⚠

éq. selon les lignes $\not\Rightarrow$ semblables

But: Remplacer A par une matrice diagonale qui lui est semblable.

5.2 Diagonalisation

Pour $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, notre but est de chercher $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit égale à une matrice diagonale D :

On va chercher s'il existe P inversible avec
$P^{-1}AP = D$ (diagonale). $\quad (A = PDP^{-1})$

$$
\begin{aligned}
A^k &= (PDP^{-1})^k \\
&= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) \\
&= PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_n}DP^{-1} \dots PDP^{-1} \\
&= P D^k P^{-1}
\end{aligned}
$$

Donc A^k et D^k sont aussi semblables et pour
$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$, on a $D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^k \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^k = P D^k P^{-1}$ facile à calculer.

Définition 56 (matrice diagonalisable)**.**
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si A est semblable à une matrice diagonale D, alors on dira qu'elle est *diagonalisable*. Dans ce cas, on aura

$$\underline{D = P^{-1}AP \text{ et } A = PDP^{-1}.}$$

pour une matrice inversible $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

⚠ Pas toutes les matrices sont diagonalisables !

Théorème 51 (critère de diagonalisation). *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors A est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.*

Pratiquement :
On cherche d'abord les valeurs propres, puis les espaces propres associés. Si on obtient n vecteurs propres $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n$ linéairement indépendants, alors on peut poser

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{où } A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

- P est inversible car les $\vec{v}_i$ sont lin. indép. et ils forment une base de $\mathbb{R}^n$.
- $D = P^{-1}AP$? On va comparer les colonnes de AP et PD :

$$AP = A\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{v}_1 & \ldots & A\vec{v}_n \end{pmatrix} \quad \text{(déf. du prod. matriciel)}$$

$$PD = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \ldots & \lambda_n\vec{v}_n \end{pmatrix}$$

Les colonnes sont identiques !

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \{1; 2\}$ $\quad \lambda = 1$ est de mult. alg. 2

On a $E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$E_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Ici on a seulement deux vecteurs propres lin. indép. $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable !

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \{1; 2\}$ $\quad E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

et $E_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a

$$D = P^{-1} A P.$$

Résumé

1. Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

   Ces vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^n$.

   A diag $\iff$ il existe une base formée de vecteurs propres

2. Si A possède r valeurs propres disctinctes, alors A admet au moins r vecteurs propres linéairement indépendants.

   Chaque valeur propre admet au moins un vecteur propre non nul et les vecteurs associés à des valeurs propres diff. sont lin. indép.

Théorème 52. *Soit A une matrice $n\times n$. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.*

Dans ce cas, chaque valeur propre est de mult. alg. 1.

Remarques

1) Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est diag, alors elle n'admet pas forcément n valeurs propres distinctes.

2) Si A possède $r < n$ valeurs propres distinctes, alors A peut malgré tout diagonalisable. Dans ce cas il faut étudier les espaces propres pour voir s'il y a assez de vecteurs propres lin. indép.

Théorème 53. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si $p_A(\lambda)$ admet n racines comptées avec leur multiplicité, alors A est diagonalisable si et seulement si*

Exemple

Définition 57 (multiplicité géométrique)**.**
On appelle

la *multiplicité géométrique* de la racine

Théorème 54. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si A est symétrique, alors elle est diagonalisable.*

5.3 Applications linéaires et valeurs propres

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Proposition Soit $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $C = P^{-1}AP$. Si $\mathcal{B}$ est la base de $\mathbb{R}^n$ formée des colonnes de P, alors C est la matrice qui représente T dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve

Théorème 55. *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice diagonalisable avec*

$$D = P^{-1}AP.$$

Soit $\mathcal{B}$ *la base de* $\mathbb{R}^n$ *formée des colonnes de* P. *Alors* D *est la matrice qui représente* T *dans la base* $\mathcal{B}$.

Exemple

Remarque
Si A n'est pas diagonalisable, on peut chercher à remplacer A par une matrice semblable plus simple (mais non diagonale). Pour cela, on peut compléter les vecteurs propres linéairement indépendants de A en une base de $\mathbb{R}^n$.

Considérons par exemple $A =$